



TITLE:

ある種の特異点を持った
SubvarietyによるChern類の実現に
ついて (Analytic Varieties及び
Stratified Spaces上の諸問題)

AUTHOR(S):

森本, 宏

CITATION:

森本, 宏. ある種の特異点を持ったSubvarietyによるChern類の実現について (Analytic Varieties及びStratified Spaces上の諸問題). 数理解析研究所講究録 1979, 372: 85-98

ISSUE DATE:

1979-12

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/104700>

RIGHT:

ある種の特異点を持った subvariety による
Chern 類の実現について

名大理

森本 宏

§0 導入

正則ベクトルバンドルの Chern 類を実現する subvarieties の存在については, A. Grothendieck [2], M. Cornalba and P. Griffiths [1] 等の結果がある. この論文では正則ベクトルバンドルの Chern 類を, なるべく単純な特異点を持った subvariety で実現することを考える. 詳しい証明は [3] 参照.

この論文を通して, M を n 次元パラコンパクト (開 n 開) 複素多様体, $G_{g,m}$ を \mathbb{C}^{g+m} 内の原点を通る g -plane 全体のなす複素グラスマン多様体, $\mathcal{G}_{g,m} = (E_{g,m}, \pi_{g,m}, G_{g,m})$ を $G_{g,m}$ 上の普遍バンドル, すなわち $\sigma \in G_{g,m}$ 及び σ 内のベクトル v との組 (σ, v) 全体とし, $\xi = (E, \pi, M)$ を M 上の rank が g の複素正則ベクトルバンドルで次の仮定を満たすものとする.

仮定. ある整数 m 及びある正則写像 $\sigma: M \rightarrow G_{g,m}$ が存在し

て, $\xi \cong \mathcal{O}^*(\sigma_{g,m})$ (解析的同値) を満たす.

われわれの主定理は以下の通りである. 「準線型」, 「実現」の定義については §1, §4 参照.

主定理. 任意の整数 $1 \leq k \leq n$ に対して, ξ の Chern 類 $C_k(\xi)$ は M の準線型な subvariety V で実現される. 特に, V の特異点は σ -process のみにより解消され, $\lfloor n/2 \rfloor \leq k \leq n$ なる k に対しては, V は non-singular にとれる.

特に M が Stein 多様体のときには, M 上の任意の正則ベクトルバンドルが上記の仮定を満たすことから次の系を得る.

系. Stein 多様体上の任意の正則ベクトルバンドルの Chern 類は, 準線型な subvariety で実現される.

主定理の証明の方針は以下の通りである. $p = g+1-k$ と置き, $G_{g,p+m}$ を $\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^{g+m}$ 内の g -plane 全体のなす複素グラスマン多様体とし, $G_{g,p+m}$ 内の Schubert varieties $F_1 \supset F_2 \supset F_3$ を,

$$F_n = \{ \tau \in G_{g,p+m}; \text{codim}(\pi_p(\tau)) \geq n \}$$

により定義する. ここで $|Z|$ は $\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^{g+m}$ における carrier
 で, π_p は射影 $\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^{g+m} \rightarrow \mathbb{C}^p$ とする. 定義により F_p は $G_{g,m}$ と双
 正則であるから, この双正則写像を通して写像 $\Phi: M \rightarrow G_{g,m}$
 を M から $G_{g,p+m}$ への写像とみなすことにする. \mathbb{C}^p の全空間 E
 から \mathbb{C}^p への正則写像 f に対して, われわれはある正則写像
 $\Phi_f: M \rightarrow G_{g,p+m}$ を対応させる. Φ を Φ_f に変形し, Φ_f が
 F_1 のすべての strata (i.e. $F_1 - F_2, F_2 - F_3, \dots, F_p$) に
 transverse-regular となるようにできる. この Φ_f によ
 って, F_1 を pull back すれば求める Chern 類の準線型な
 subvariety による実現が得られる.

§1. 準線型な subvarieties

p, g を $p \leq g$ なる正整数とし, $M(p, g)$ を p 行 g 列複素
 行列全体とする. 整数 r に対して,

$$M_r(p, g) = \{ A \in M(p, g) ; \text{corank}(A) \geq r \}$$

と置く. ただし $\text{corank} = p - \text{rank}$ とする. $O_{p,g}$ を p 行 g
 列零行列とすれば,

$$M_1(p, g) \supset M_2(p, g) \supset \dots \supset M_p(p, g) = O_{p,g}$$

が成立する.

n 次元複素多様体 M の subvariety の列

$$(1.1) \quad V_1 \supset V_2 \supset \dots \supset V_p$$

を考える.

定義 1.2. 列 (1.1) は次の条件をみたすとき m 位の準線型であると言う.

(a) V_p は non-singular で, 任意の整数 $2 \leq k \leq p$ に対して V_k は V_{k-1} の特異点全体からなる.

(b) 分割 $(V_1 - V_2) \cup (V_2 - V_3) \cup \dots \cup V_p$ は V_1 の regular stratification を与える.

(c) 任意の整数 $1 \leq k \leq p$ 及び任意の点 $x_0 \in V_k - V_{k+1}$ (ただし $V_{p+1} = \emptyset$) に対して, M における x_0 のある近傍 U , $\mathcal{M}_n(k, m+k) \times \mathbb{C}^q$ ($q = n - k(m+k)$) における $(O_{k, m+k}; 0)$ のある近傍 W , 及び双正則写像 $\varphi: U \rightarrow W$ が存在して, $\varphi(x_0) = (O_{k, m+k}; 0)$ かつ, 任意の整数 $1 \leq n \leq k$ に対して,

$$\varphi(U \cap V_n) = W \cap (\mathcal{M}_n(k, m+k) \times \mathbb{C}^q)$$

を満たす.

条件 (a), (b) は条件 (c) から導かれる. 列 (1.1) が m 位の準線型列で $V_k \neq \emptyset$ ならば, M における V_k の余次元は $k(m+k)$ ($1 \leq k \leq p$) となる.

定義 1.3. M の subvariety V が m 位の準線型であるとは、 $V_1 = V$ なる m 位の準線型列 (1.1) が存在するときを言う。このとき列 (1.1) を associated sequence と言う。

特に余次元 $m+1$ の non-singular subvariety は m 位の準線型な subvariety である。従って M 自身も準線型と言うことになる。

$\pi(p, g)$, $G_{g, p+m}$ 内には次のような準線型列がある。

補題 1.4. $\pi_1(p, g) \supset \pi_2(p, g) \supset \dots \supset \mathcal{O}_{p, g}$ は $\pi(p, g)$ 内の $g-p$ 位の準線型列である。

$\mathcal{O}_{p, g}$ の近傍における準線型性は定義から明らかである。その他の点において条件 (c) が成立することは証明を要するが、ここでは省略する。

上記の補題と Schubert variety の定義から、次の補題が得られる。

補題 1.5. $G_{g, p+m}$ における Schubert variety の列 $F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_p$ は $g-p$ 位の準線型列である。

準線型性は, *transverse-regular map* に関して次のような不変性を持っている.

補題 1.6. M, N を複素多様体, $V_1 \supset V_2 \supset \cdots \supset V_p$ を N における m 位の準線型列とする. 正則写像 $f: M \rightarrow N$ が, V_1 のすべての *strata* (i.e. $V_1 - V_2, V_2 - V_3, \dots, V_p$) に対して *transverse-regular* ならば, M 内の列 $f^{-1}(V_1) \supset f^{-1}(V_2) \supset \cdots \supset f^{-1}(V_p)$ は m 位の準線型列となる.

準線型な *subvariety* の特異点解消は次のように行われる. $V_1 \supset V_2 \supset \cdots \supset V_p$ を M 内の m 位の準線型列とする. このとき V_p は *non-singular* だから, V_p を中心とする σ -process $\sigma: \tilde{M} \rightarrow M$ が考えられる. この σ -process によって $V_1 \supset V_2 \supset \cdots \supset V_{p-1}$ から得られる列を $\tilde{V}_1 \supset \tilde{V}_2 \supset \cdots \supset \tilde{V}_{p-1}$ と記すことにする. すなわち,

$$\tilde{V}_k = \text{closure of } \sigma^{-1}(V_k - V_p) \text{ in } \tilde{M}.$$

このとき $\tilde{V}_1 \supset \tilde{V}_2 \supset \cdots \supset \tilde{V}_{p-1}$ は \tilde{M} において m 位の準線型列をなすことが確かめられる. 従って特に \tilde{V}_{p-1} は *non-singular* となり, \tilde{M} に対して \tilde{V}_{p-1} を中心とする σ -process を考えることができる. 以下同様にして *inductive* に次の定理を得る.

定理 1.7. 準線型な subvariety の特異点は σ -process のみにより解消される。

§2 正則写像の特異点

$\xi = (E, \pi, M)$ を導入で述べた仮定をみたす rank が r の正則ベクトルバンドルとする。この節では全空間 E から複素ユークリッド空間への正則写像について考える。以後 M を ξ の zero cross-section と同一視する。

正則写像 $f: E \rightarrow \mathbb{C}^p$ に対して, fibre 方向の微分:

$$d_x(f|_{F_x}): T_x(F_x) \rightarrow T_{f(x)}(\mathbb{C}^p)$$

を考える。ここで F_x は $x \in M$ 上の fibre, $f|_{F_x}$ は f の F_x への制限とする。 $x \in M$ が f の fibrewise regular point であるとは $d_x(f|_{F_x})$ の rank が maximum のとき, すなわち $p \geq r$ の場合には 1 対 1, $p \leq r$ の場合には onto のときを言う。またこのとき, f は x において fibrewise regular であるという。

以後 $p \leq r$ と仮定する。

定義 2.1. $1 \leq k \leq p$ なる各整数 k に対して, k -th fibrewise singular set $F S_k(f)$ を

$FS_k(f) = \{x \in M; \text{corank}(dx(f|_{F_x})) \geq k\}$
 によって定義する.

$FS_k(f)$ は M の subvariety で $FS_1(f) \supset FS_2(f) \supset \dots \supset FS_p(f)$ をみたす.

以後 $f: E \rightarrow \mathbb{C}^p$ を $f = (f^1, f^2, \dots, f^p)$ と記す. 点 $x \in M$ におけるバンドル ξ の local triviality;

$$\psi = (z; \xi) = (z^1, \dots, z^n; \xi^1, \dots, \xi^2): \pi^{-1}(U) \rightarrow W \times \mathbb{C}^1 \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^2$$

$$\psi(x_0) = (0; 0)$$

を一つ選ぶ. この local triviality (ψ, U, W) に対して, 正則写像 $\bar{f}_\psi: W \rightarrow \mathcal{M}(p, g)$ を

$$\bar{f}_\psi(z) = \left(\frac{\partial f^i \circ \psi^{-1}}{\partial \xi^j}(z; 0) \right)$$

によって定義する.

定義 2.2. $f: E \rightarrow \mathbb{C}^p$ が $x_0 \in M$ において一般の位置にあるとは, \bar{f}_ψ が W において $\mathcal{M}_1(p, g)$ のすべての strata に対して transverse-regular となるような x_0 における local triviality (ψ, U, W) が存在するときを言う.

K を M の任意の部分集合としたとき, $f: E \rightarrow \mathbb{C}^p$ が K の位

意の点で一般の位置にあるとき, f は K において一般の位置にあると言う.

さて, f が一般の位置にあることの意味について調べてみよう. $\Phi: M \rightarrow G_{g,m}$ を導入部の仮定により与えられた正則写像とする. $\hat{\Phi}: E \rightarrow E_{g,m}$ を全空間上への Φ の lift とし, $\varphi_{g,m}: E_{g,m} \rightarrow \mathbb{C}^{2+m}$ を $\varphi_{g,m}((z, w)) = v$ なる正則写像とする. $\Psi = \varphi_{g,m} \circ \hat{\Phi}$ とおけば Ψ は E から \mathbb{C}^{2+m} への正則写像で, M の各点で *fibrewise regular* である.

今, 正則写像 $f: E \rightarrow \mathbb{C}^p$ が与えられたとする. この f に対し, $\Psi_f: E \rightarrow \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^{2+m}$ を $\Psi_f(w) = (f(w), \Psi(w))$ によって定義する. Ψ_f も M の各点で *fibrewise regular* であるから, 各点 $x \in M$ に対して, $d_x(f|_{F_x})$ による $T_x(F_x)$ の像は $\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^{2+m}$ 内の q -plane をなす. この対応により正則写像 $\Phi_f: M \rightarrow G_{g,p+m}$ を定義する.

写像 Φ_f のもとで, $FS_R(f)$ と F_R には次のような関係がある.

補題 2.3: $f: E \rightarrow \mathbb{C}^p$ に対して,

- (a) 任意の $1 \leq k \leq p$ に対し, $FS_R(f) = \Phi_f^{-1}(F_k)$
- (b) f が M において一般の位置にあることと, Φ_f が F_1 のすべての strata に対し *transverse-regular* である

ることとは同値である。

この補題と補題 1.5 及び 1.6 から容易に次を得る。

定理 2.4. $f: E \rightarrow \mathbb{C}^p$ が M において一般の位置にあれば、
列 $FS_1(f) \supset FS_2(f) \supset \dots \supset FS_p(f)$ は $g-p$ 位の準線型
列である。

§3 近似定理と存在定理

この節では、 $f: E \rightarrow \mathbb{C}^p$ を一般の位置にある写像で近似できるかどうか、また M 全体で一般の位置にある写像が存在するかどうかを問題にしよう。

近似定理を述べるために pseudonorm $\|\cdot\|_L$ について説明しておく。全空間 E を $n+g$ 次元複素多様体とみなし、これを locally finite な $\{W_i\}_{i \in I}$ で cover する。このとき各 W_i は座標 $w_i = (w_i^1, \dots, w_i^{n+g})$ をもつ compact な座標近傍と仮定してよい。 E のコンパクトな部分集合 L 及び正則写像 $f: E \rightarrow \mathbb{C}^p$ に対し $\|f\|_L$ を、

$$\|f\|_L = \sup_{i \in I(L)} \sup_{w_i \in W_i} \left\{ \sum_k |f^k(w_i)| + \sum_{k,l} \left| \frac{\partial f^k}{\partial w_i^l}(w_i) \right| + \sum_{k,l,m} \left| \frac{\partial^2 f^k}{\partial w_i^l \partial w_i^m}(w_i) \right| \right\}$$

によって定義する. ただし $I(L) = \{i \in I; L \cap W_i \neq \emptyset\}$ とする.

K を M のコンパクト部分集合としたとき, K は E におけるコンパクト部分集合とみなせるから, $f: E \rightarrow \mathbb{C}^p$ に対し上記の定義により $\|f\|_K$ が定義される. このとき $\|\cdot\|_K$ は単に K 上での写像の距離だけでなく, K の E におけるあるコンパクト近傍上での距離も計, ていることに注意.

さて, 近似に関しては次の定理が成立する.

定理 3.1. (近似定理) $f: E \rightarrow \mathbb{C}^p$ を正則写像, K 及び L をそれぞれ M 及び E のコンパクト部分集合とする. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, 正則写像 $g: E \rightarrow \mathbb{C}^p$ で, K において一般の位置にあり, $\|f - g\|_{K \cup L} < \varepsilon$ をみたすものが存在する.

この近似定理は, この論文において基礎をなす定理であるが, 紙数の都合により証明は省略する.

M をコンパクト部分集合の増加列 $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ で覆い, 上記の近似定理を各 K_n に対し次々に適用することにより, 次の存在定理を得る.

定理 3.2. (存在定理) 任意の整数 $1 \leq p \leq 8$ に対し, M において一般の位置にある正則写像 $f: E \rightarrow \mathbb{C}^p$ が少なくとも一つ存在する.

§4 主定理の証明の概略

主定理を証明する前に「実現」の定義を述べておこう. この節を通して H_* , H^* は \mathbb{Z} 係数の singular homology 及び cohomology とする.

V を M 内の余次元 k の subvariety, V' を V の特異点全体とする. $H^0(V-V') \cong H^{2k}(M, M-V)$ ([1] 参照) であるから, injection $(M, \emptyset) \rightarrow (M, M-V)$ を通して写像 $\psi_V^*: H^0(V-V') \rightarrow H^{2k}(M)$ を得る. $\{V_m\}$ を $V-V'$ の連結成分, $i_m: V_m \rightarrow V-V'$ を inclusion, $\omega_m \in H^0(V_m)$ を canonical generators とし $\omega_V = \sum_m i_m^*(\omega_m)$ とする. V の M における fundamental cohomology class $\{V\} \in H^{2k}(M)$ を

$$\{V\} = \psi_V^*(\omega_V)$$

によって定義する.

定義 4.1. M の subvariety V が cohomology class $c \in H^*(M)$ を実現するとは $c = \{V\}$ のときを言う.

さて $p = g - k + 1$ と置き, 今 $f: E \rightarrow \mathbb{C}^p$ は M において一般の位置にあるとする. $\pi: M \rightarrow G_{g,m}$ を仮定により与えられた正則写像とする. §2 で考えた写像 $\pi_f: M \rightarrow G_{g,p+m}$ は補題 2.3 により F_1 のすべての strata に対し transverse-regular になっている. $\xi \cong \pi_f^*(\gamma_{g,p+m})$ (解析的同値) で, しかも F_1 は $\gamma_{g,p+m}$ の Chern 類 $C_{g-p+1}(\gamma_{g,p+m})$ を実現することから, F_1 を π_f で pull back してやれば, 次の補題を得る.

補題 4.2. 正則写像 $f: E \rightarrow \mathbb{C}^p$ が M において一般の位置にあれば, subvariety $FS_1(f)$ は Chern 類 $C_{g-p+1}(\xi)$ を実現する.

存在定理 (定理 3.2) から, M において一般の位置にある正則写像 $f: E \rightarrow \mathbb{C}^p$ が存在するから, 上記の補題と定理 2.4 及び定理 1.7 により主定理が従う.

参考文献

[1] M. Cornalba and P. Griffiths : Analytic cycles

and vector bundles on non-compact algebraic varieties, *Inventiones Math.*, 28, (1975), 1 - 106

- [2] A. Grothendieck : La théorie des classes de Chern, *Bull. Soc. Math. France*, 86 (1958).
- [3] H. Morimoto : Realization of Chern classes by subvarieties with certain singularities, *Nagoya Math. Journal*, to appear.
- [4] R. Thom : Les singularités des applications différentiables, *Ann. Inst. Fourier Grenoble*, 6 (1955/56), 43 - 87.
- [5] H. Whitney : Tangents to an analytic variety, *Ann. Math.*, 81 (1965), 496 - 549.
- [6] W. T. Wu : Sur les classes caractéristiques des structures fibrées sphériques, *Act. Sci. et Ind.*, n° 1183.